

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire les espaces vectoriels et de revoir en détail les opérations élémentaires associées à l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. La matière dans cette section est présentée dans le livre *Analyse* de Stewart. En revanche, notre cadre conceptuel sera un peu plus large.

1 Survol du cours

MTH1006 - Pondération

Prérequis : cours du CÉGEP *d'algèbre linéaire*

Crédits : 2 crédits, 11 semaines de 3 heures

TD : 10 fois, vendredi 10h30-12h20 au A-410 !!!!!

Devoirs : 3 devoirs pour 15 % - déjà sur le site

CP : 35 %, 18 février, 8h30-10h20

Examen final : 50 %, 10 avril

Contrôle diagnostique : un bonus de jusqu'à 5 %

Site web : Moodle

MTH1006 - Documentation

Plan de cours : À lire !

Notes de cours : Coopoly ; explications

Guide de travail : Coopoly ; liste d'exercices

Analyse de Stewart : contient une bonne intro aux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

MTH1006 - Morale

Lisez les notes et faites des exercices régulièrement.

Faites tous les exercices recommandés. L'examen sera semblable.

Venez en classe. Allez au TD. Posez des questions.

Apprenez à écrire des solutions complètes et détaillées. Re-vérifiez vos calculs.

Seul la paresse peut vous empêcher de réussir ce cours.

L'algèbre linéaire Historique

La forme actuelle de la théorie que l'on appelle *l'algèbre linéaire* est relativement récente et le fruit des travaux de Sylvester (1848), Cayley (1855), Gibbs (≈ 1875), Peano (1888), Banach (1920) et bien d'autres.

Concepts

L'algèbre linéaire est une forme **abstraite** mais conceptuellement **simple** pour décrire une grande famille de résultats disparates. Malheureusement, une bonne partie de sa force réside dans son abstraction. La théorie est intimement liée à une *vision géométrique des transformations linéaires*.

2 Espaces vectoriels

Définitions

Définition 2.1. *Un espace vectoriel réel est un ensemble V sur lequel il existe deux opérations*

$$\begin{array}{ll} \text{addition vectorielle} & \vec{u} + \vec{v} \text{ où } \vec{u}, \vec{v} \in V, \\ \text{multiplication scalaire} & c\vec{u} \text{ où } c \in \mathbb{R}, \vec{u} \in V, \end{array}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
- ii) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- iii) *il existe $\vec{0} \in V$ telle que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$*
- vi) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- v) $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
- vi) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$ vii) $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u})$ viii) $1\vec{u} = \vec{u}$

Exemples

Exemple 2.1. Soit $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n -tuples $(u_1, \dots, u_n)$ ordonnées où les $u_i \in \mathbb{R}$. On **définit** les deux opérations suivantes

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n, \\ c(u_1, \dots, u_n) &= (cu_1, \dots, cu_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ avec ces opérations forme un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 2.2. Soit P^n l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de degré au plus n . On **définit** les deux opérations suivantes

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \in P^n, \\ c(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (ca_0) + (ca_1)x + \dots + (ca_n)x^n \in P^n. \end{aligned}$$

L'ensemble P^n avec ces opérations forme un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 2.3. Soit $\mathcal{M}^{n \times m}$ l'ensemble des matrices avec n rangées et m colonnes, c-à-d

$$\mathcal{M}^{n \times m} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec les définitions évidentes d'addition et de multiplication scalaire, l'ensemble $\mathcal{M}^{n \times m}$ forme un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 2.4. Soit $\mathcal{I}^{n \times n}$ l'ensemble des matrices inversibles de taille $n \times n$. Avec les définitions évidentes d'addition et de multiplication scalaire, cet ensemble n'est pas un espace vectoriel.

Pensez I et $-I$. Les deux sont inversibles mais leur somme, en l'occurrence 0, ne l'est pas.

Exemples

Exemple 2.5. Soit $\mathcal{A}^n$ l'ensemble des matrices symétriques avec n rangées et n colonnes, c-à-d

$$\mathcal{A}^{n \times n} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec les définitions évidentes d'addition et de multiplication scalaire, l'ensemble $\mathcal{A}^n$ forme un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 2.6. Soit p un nombre réel positif plus grand que 1. Soit l'ensemble $L^p([-1, 1])$ de toutes les fonctions $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dont la p -ème puissance est intégrable, c-à-d

$$L^p([-1, 1]) = \left\{ \text{toutes les fonctions } f \text{ telles que } \int_{-1}^1 |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Si $f, g \in L^p([-1, 1])$, alors on définit les deux opérations suivantes

$$\begin{aligned} f + g &= \text{la fonction telle que } (f + g)(x) = f(x) + g(x), \\ cf &= \text{la fonction telle que } (cf)(x) = cf(x). \end{aligned}$$

Il est difficile de montrer que $L^p([-1, 1])$ est un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 2.7. Soit S l'ensemble des solution $y(x)$ de l'équation différentielle de Bessel

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - 1)y(x) = 0.$$

Avec les définitions évidentes d'addition et de multiplication scalaire, l'ensemble S forme un espace vectoriel.

Conclusions

- 1) Certains espaces vectoriels sont très petits $\mathbb{R}^2$ et d'autres sont très gros, comme $L^2([-1, 1])$.
- 2) Certains espaces vectoriels sont des sous-ensembles de d'autres espaces vectoriels, comme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 &\subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \\ \mathcal{A}^n &\subset \mathcal{M}^{n \times n} \\ P^1 &\subset P^2 \subset \dots \subset P^n \subset L^2([-1, 1]) \\ S &\subset L^2([-1, 1]) \end{aligned}$$

- 3) Nous verrons éventuellement que tout espace de "dimension finie" est "équivalent" à $\mathbb{R}^n$.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Un espace vectoriel V qui satisfait nos 8 conditions possède une géométrie très limitée.

Celle-ci se caractérise essentiellement par les 2 notions géométriques suivantes :

- 1) la loi du parallélogramme ;
- 2) les homothéties.

On va tenter de développer une intuition pour cette géométrie en regardant un espace vectoriel très proche de notre expérience humaine, c-à-d $\mathbb{R}^n$.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Dans $\mathbb{R}^2$, chaque vecteur correspond à un point du plan.

Exemple 2.8. Identifiez $\vec{u} = (3, -2)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans le plan, il existe deux vecteurs privilégiés

$$\vec{i} = (1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{j} = (0, 1).$$

Exemple 2.9. Identifiez $\vec{u} = -2\vec{i} + 1\vec{j}$ dans $\mathbb{R}^2$.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Dans $\mathbb{R}^n$, il n'y a pas de différence entre un **vecteur** et une **droite de l'origine au point**.

Mais on doit distinguer entre un segment orienté $\overline{AB}$ reliant les deux points A et B et un vecteur. Un vecteur relie l'origine à un point, pas deux points arbitraires ensemble.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Exemple 2.10. Calculez $\vec{u} + \vec{v}$ si $\vec{u} = (2, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Faites un dessin de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{u} + \vec{v}$.

La loi du parallélogramme La somme $\vec{u} + \vec{v}$ correspond au sommet du parallélogramme dont les cotés parallèles sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans des espaces vectoriels plus complexes, on va supposer que le même dessin est possible.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Exemple 2.11. Calculez $\vec{u} - \vec{v}$ si $\vec{u} = (2, 1)$ et $\vec{v} = (-1, 2)$ dans $\mathbb{R}^2$. Faites un dessin de $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{u} - \vec{v}$.

La différence $\vec{u} - \vec{v}$ correspond au segment rejoignant $\vec{v}$ à $\vec{u}$.

Attention : Ceci est un abus de langage parce que le segment reliant $\vec{v}$ à $\vec{u}$ N'EST PAS un vecteur. Il faut effectuer une translation pour compléter cette identification.

La géométrie dans les espaces vectoriels

Exemple 2.12. Calculez $2\vec{u}$, $-5\vec{u}$, $-1/3\vec{u}$, $0\vec{u}$ et $15\vec{u}$ si $\vec{u} = (-3, 6)$ dans $\mathbb{R}^2$. Faites un dessin de ces vecteurs.

Les homothéties Les multiples $c\vec{u}$ forment une droite traversant l'origine et dans la direction de $\vec{u}$.

Dans des espaces vectoriels plus complexes, on va supposer que les multiples $c\vec{u}$ forment des "droites".

3 Les espaces vectoriels normés

Définitions

Définition 3.1. On dit qu'un espace vectoriel V est normé s'il existe une fonction

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R},$$

appelée norme, qui satisfait les conditions suivantes :

- i) $\|c\vec{u}\| = |c|\|\vec{u}\|$,
- ii) $\|\vec{u}\| \geq 0$ et $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$,
- iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Pas tous les espaces vectoriels possèdent des normes "intéressantes". Par exemple, l'ensemble des fonctions avec un nombre infini de dérivées ne possède pas de bonne norme.

Définitions

Théorème 3.2. La norme euclidienne de tout vecteur $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, définit par

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\| = \{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2\}^{1/2},$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe beaucoup d'autres normes, telles que

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|,$$

ou

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\|_\infty = \max\{|u_1|, |u_2|, \dots, |u_n|\},$$

ou

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\|_p = \{|u_1|^p + |u_2|^p + \dots + |u_n|^p\}^{1/p}.$$

Définitions

Exemple 3.1. Montrez que l'expression

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\|_1 = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n|$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

La géométrie dans les espaces vectoriels normés

Dans un espace vectoriel normé, nous avons deux nouvelles notions géométriques :

- 1) chaque vecteur a une longueur ;
- 2) chaque vecteur a une direction.

On va tenter de développer une intuition pour cette géométrie en regardant $\mathbb{R}^n$.

La géométrie dans les espaces vectoriels normés

Exemple 3.2. Calculez $\|\vec{u}\|$ si $\vec{u} = (-1, 0, 3) \in \mathbb{R}^3$ ou $\vec{u} = (-2, 2, 0, 5) \in \mathbb{R}^4$.

Dans $\mathbb{R}^n$, la norme d'un vecteur $\|\vec{u}\|$ est égale à la longueur du segment de droite reliant $\vec{0}$ à $\vec{u}$.

Définition 3.3. Dans un espace vectoriel normé, la longueur d'un vecteur $\vec{u}$ est définie

$$\|\vec{u}\|.$$

Définitions

Exemple 3.3. Soit P^n , l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Pour tout $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in P^n$, on peut calculer

$$\|p\| := \left\{ \int_{-1}^1 p(x)^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Cette expression définit une norme sur P^n (On va voir ceci plus tard).

Exemple 3.4. Calculez la norme de $p(x) = 1 + x^2$ dans P^2 .

La géométrie dans les espaces vectoriels normés

Définition 3.4. Dans un espace vectoriel normé V , la direction $\vec{d} \in V$ d'un vecteur $\vec{u} \in V$ est définie

$$\vec{d} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

Remarquez que $\|\vec{d}\| = 1$.

Exemple 3.5. Calculez la direction $\vec{d}$ du vecteur $\vec{u} = (3, -1, 4) \in \mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^n$, la direction $\vec{d}$ appartient à la droite traversant $\vec{u}$ et l'origine $\vec{0}$. De plus $\|\vec{d}\| = 1$.

Définitions

Exemple 3.6. Calculez la direction $\vec{d}$ de $p(x) = 1 + x^2$ dans P^2 .

4 Les espaces vectoriels avec produit scalaire**Définitions**

Définition 4.1. Soit un espace vectoriel V et une fonction

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On dit qu'elle définit un produit scalaire si elle satisfait les conditions suivantes :

- i) $(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{v}, \vec{w})$
- ii) $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$
- iii) $c(\vec{u}, \vec{v}) = (c\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, c\vec{v})$,
- iv) $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ et $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Exemples

Exemple 4.1. Montrez que l'opérateur suivant définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$: pour tout $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ on calcule

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, on préférera écrire tout simplement

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Exemples

Exemple 4.2. Soit P^n l'ensemble des polynômes $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de degré au plus n . On **définit** les deux opérations suivantes

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \in P^n, \\ c(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = (ca_0) + (ca_1)x + \dots + (ca_n)x^n \in P^n. \end{aligned}$$

Montrez que P^n avec ces opérations forme un espace vectoriel.

Exemple 4.3. Montrez que l'opérateur suivant définit un produit scalaire sur P^n

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx.$$

Définitions

Théorème 4.2. Si un espace vectoriel V possède un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

définit une norme sur V . Cette norme s'appelle **la norme induite** (par $(\cdot, \cdot)$).

Pas tous les espaces vectoriels ont des produits scalaires. Certains espaces ont des normes sans avoir de produit scalaire.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Le résultat suivant est d'une importance capitale !

Lemme 4.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *La norme induite $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$ satisfait*

$$|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Preuve du lemme 4.3 Si c est réel, alors

$$\begin{aligned} \|c\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (c\vec{u} + \vec{v}, c\vec{u} + \vec{v}) \\ &= (c\vec{u} + \vec{v}, c\vec{u}) + (c\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}) \\ &= (c\vec{u}, c\vec{u}) + (\vec{v}, c\vec{u}) + (c\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{v}) \\ &= c^2\|\vec{u}\|^2 + 2c(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Preuve du lemme 4.3 Si c est réel, alors

$$0 \leq \|c\vec{u} + \vec{v}\|^2 = c^2\|\vec{u}\|^2 + 2c(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2.$$

On pose ensuite

$$c = -\frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2},$$

ce qui donne

$$0 \leq \frac{(\vec{u}, \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2} + \|\vec{v}\|^2 + 2 \cdot (-1) \cdot \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\|^2} \cdot (\vec{u}, \vec{v}).$$

En simplifiant, on trouve alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \frac{(\vec{u}, \vec{v})^2}{\|\vec{u}\|^2} \right| \leq \|\vec{v}\|^2.$$

Fin de la preuve du Lemme 4.3**Preuve du Théorème 4.2**

On vérifie facilement que $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$ satisfait

- i) $\|c\vec{u}\| = |c|\|\vec{u}\|$,
- ii) $\|\vec{u}\| \geq 0$ et $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

$$\|c\vec{u}\| = \sqrt{(c\vec{u}, c\vec{u})} = \sqrt{c^2(\vec{u}, \vec{u})} = |c|\|\vec{u}\|$$

La propriété iv) dit que le produit scalaire doit satisfaire $(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$ et $(\vec{u}, \vec{u}) = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$. Alors la propriété ii) de la définition de la norme est aussi clairement satisfaite.

Preuve du Théorème 4.2

On démontre que la norme induite satisfait l'inégalité du triangle

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

mais à gauche, on a

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2.$$

L'inégalité du triangle est donc équivalente à

$$\|\vec{u}\|^2 + 2(\vec{u}, \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2$$

c-à-d

$$(\vec{u}, \vec{v}) \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Fin de la preuve du Théorème 4.2**Exemples**

Exemple 4.4. On a déjà vu que

$$(p, q) = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) \, dx,$$

forme un produit scalaire sur P^n . De ceci, on déduit que

$$\|p\| = \left\{ \int_{-1}^1 p(x)^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

est une norme sur P^n .

Exemples

Exemple 4.5. Plus généralement,

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x) \cdot g(x) \, dx,$$

est un produit scalaire sur l'ensemble $L^2([-1, 1])$ des fonctions à carrée intégrable ; voir exemple 2.6. Donc,

$$\|f\| = \left\{ \int_{-1}^1 f(x)^2 \, dx \right\}^{1/2}$$

est une norme sur $L^2([-1, 1])$.

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Dans un espace vectoriel avec un produit scalaire, nous avons donc toutes les notions précédentes :

- 1) la loi du parallélogramme ;
- 2) les homothéties ;
- 3) chaque vecteur a une longueur ;
- 4) chaque vecteur a une direction ;

ainsi qu'une nouvelle notion géométrique :

Définition 4.4. Dans un espace vectoriel V avec un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ on définit l'angle $\theta \in [0, \pi]$ entre deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in V$ comme étant la quantité satisfaisant

$$\cos \theta = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Exemple 4.6. Calculez l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{u} = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ et $\vec{v} = (2, 2) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 4.7. Calculez l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si $\vec{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = (1, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$.

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Exemple 4.8. Calculez l'angle entre $p(x) = x$ et $q(x) = 1 - x^2$ dans P^2 .

Exemple 4.9. Calculez l'angle entre $f(x) = \sin \pi x$ et $g(x) = \cos \pi x$ dans $L^2([-1, 1])$.

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Théorème 4.5. Dans $\mathbb{R}^n$, chaque vecteur engendre une droite unique, donc chaque pair de vecteurs engendre un plan unique. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire habituel $\vec{u} \cdot \vec{v}$, alors l'angle entre deux vecteurs est égal à l'angle dans le plan entre les deux droites engendrées par les deux vecteurs.

Preuve On commence avec un triangle avec deux côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont η mesure l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La loi du cosinus nous dit que

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \eta.$$

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire**Preuve du Théorème 4.5** En plus de l'identité

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\eta,$$

on a que

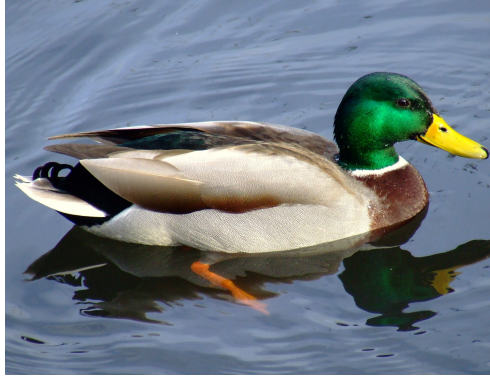
$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2.$$

En comparant ces deux expressions, on déduit que

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\eta,$$

c-à-d

$$\cos\theta = \cos\eta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Fin de la preuve.**Le test du canard**

"If it looks like a duck, swims like a duck and quacks like a duck, then it probably is a duck."

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Définition 4.6. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit l'angle entre deux plans comme l'angle entre les vecteurs qui leurs sont perpendiculaires.

La géométrie dans les espaces vectoriels avec un produit scalaire

Définition 4.7. On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Théorème 4.8 (Fourier). Pour tous les entiers n et m , les fonctions $\sin n\pi x$ et $\cos m\pi x$ sont mutuellement orthogonaux dans $L^2([-1, 1])$. Pour tous les entiers n et m distincts, les paires de fonctions $\sin n\pi x$ et $\sin m\pi x$, ou $\cos n\pi x$ et $\cos m\pi x$, sont mutuellement orthogonaux dans $L^2([-1, 1])$.

La projection

Théorème 4.9. Soit V un espace vectoriel avec un produit scalaire. Étant donné $\vec{u} \in V$, alors tout vecteur $\vec{w} \in V$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{w} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} + \text{orth}_{\vec{u}} \vec{w},$$

où

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} &= \frac{(\vec{u}, \vec{w})}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \text{ est un multiple de } \vec{u}, \\ \text{orth}_{\vec{u}} \vec{w} &= \vec{w} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u}. \end{aligned}$$

On appellera $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{w}$ la **projection de $\vec{w}$ sur $\vec{u}$** , et $\text{orth}_{\vec{u}} \vec{w}$ la **composante orthogonale de $\vec{w}$ par rapport à $\vec{u}$** .

La projection

Exemple 4.10. Calculez la projection de $\vec{w} = (0, 0, 1)$ sur $\vec{u} = (-1, 3, 1)$.

5 Les droites et les plans dans $\mathbb{R}^n$ **Un plan dans $\mathbb{R}^n$**

Nous vous invitons à porter attention au fait que les droites et les plans auront des descriptions légèrement différentes dépendant s'ils passent par l'origine.

L'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ perpendiculaires à un vecteur $\vec{n}$ forme un plan P . Mathématiquement, on décrit cet ensemble sous la forme

$$P = \left\{ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \right\}.$$

Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$, alors la contrainte $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ s'écrit

$$x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_n n_n = 0.$$

Un plan

Exemple 5.1. Trouvez un vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^4$ perpendiculaire au plan formé des vecteurs $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ satisfaisant

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0.$$

Une droite dans $\mathbb{R}^2$

Un plan dans $\mathbb{R}^2$ est en fait une droite.

Exemple 5.2. Dessinez la droite dans $\mathbb{R}^2$ des vecteurs (x_1, x_2) satisfaisant

$$3x_1 - 2x_2 = 0.$$

Un plan traversant un point $\vec{p}$ dans $\mathbb{R}^n$

Le plan traversant $\vec{p}$ et perpendiculaire à $\vec{n}$ est plus difficile à décrire.

On remarque que si $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ appartient à ce plan, alors $\vec{u} - \vec{p}$ devra être perpendiculaire à $\vec{n}$.

Mathématiquement, on décrira cet ensemble de la manière suivante

$$P = \left\{ \vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (\vec{u} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \right\}.$$

Si $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, et $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$, alors la contrainte $(\vec{u} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ s'écrira

$$(x_1 - p_1)n_1 + (x_2 - p_2)n_2 + \dots + (x_n - p_n)n_n = 0.$$

On appelle ceci la **description cartésienne** d'un plan.

Un plan traversant un point $\vec{p}$ dans $\mathbb{R}^n$

Exemple 5.3. Trouvez la description cartésienne du plan dans $\mathbb{R}^3$ traversant $\vec{p} = (2, 0, -3)$ et orthogonal à $\vec{n} = (-5, 2, -1)$.

Un plan traversant un point $\vec{p}$ dans $\mathbb{R}^n$

Exemple 5.4. Trouvez un vecteur normal et un point dans le plan décrit par

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 12.$$

Une droite dans $\mathbb{R}^n$

Une droite est entièrement déterminée par deux points (vecteurs) sur la droite.

De même, on peut décrire une droite si on connaît un point $\vec{p}$ sur la droite et la direction $\vec{u}$ de la droite.

Définition 5.1. La description paramétrique d'une droite D dans $\mathbb{R}^n$ traversant $\vec{p}$ et dans la direction $\vec{u}$ est

$$D = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} \text{ où } s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemple 5.5. Donnez la description paramétrique de la droite D traversant les points $\vec{p}_1 = (-1, 3, 2)$ et $\vec{p}_2 = (5, -3, 6)$.

Une droite dans $\mathbb{R}^3$

Une droite dans $\mathbb{R}^3$ est l'intersection de deux plans. Si on vous présente deux équations, comme

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10, \end{aligned}$$

alors l'ensemble des vecteurs satisfaisant ces deux équations forment une droite.

Exemple 5.6. Trouvez la description paramétrique de cette droite.

Une autre description des droites dans $\mathbb{R}^3$

Une autre façon de décrire les droites dans $\mathbb{R}^3$ est plus complexe, mais des fois pratique.

Soient deux points $\vec{p}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{p} = (x_2, y_2, z_2)$, alors l'ensemble des points (x, y, z) sur la droite traversant ces points doit satisfaire

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

C'est dire que les rapports des variations doivent être égaux. On voit aisément que ceci est équivalent à deux équations linéaires

$$\begin{aligned} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} &= 0 \\ \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} &= 0. \end{aligned}$$

6 Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$ **Idée générale**

C'est un truc !

Seulement dans $\mathbb{R}^3$!

Selon moi, ça ne fait pas partie de la théorie générale des espaces vectoriels.

Étant donné deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

Propriétés du produit vectoriel

Les propriétés principales sont :

i) distributivité sur l'addition

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

ii) distributivité sur la multiplication scalaire par $c \in \mathbb{R}$

$$c(\vec{u} \times \vec{v}) = (c\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (c\vec{v})$$

iii) anti-symétrie

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

iv) interprétation géométrique : $\vec{u} \times \vec{v}$ est l'unique vecteur

- * perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- * de longueur égal à l'aire du parallélogramme formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- * dans la direction donnée par la règle de la main droite

Propriétés du produit vectoriel

La dernière propriété implique que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sin \theta \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|,$$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

7 Les sous-espaces vectoriels

Exemples

Une source très riche et importante d'espaces vectoriels sont les sous-ensembles d'espaces vectoriels. Nous avons déjà vu que

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 &\subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \\ \mathcal{A}^n &\subset \mathcal{M}^{n \times n} \\ P^1 &\subset P^2 \subset \dots \subset P^n \subset L^2([-1, 1]) \\ S &\subset L^2([-1, 1]) \end{aligned}$$

Définitions

Définition 7.1. Soit un espace vectoriel V et W un sous-ensemble de V . Si W est aussi un espace vectoriel pour les mêmes opérations d'addition vectoriel et de multiplication scalaire que V , alors on appellera W un sous-espace vectoriel de V .

En pratique, il serait déplaisant de vérifier toutes les 8 conditions pour un sous-ensemble.

Propriétés des sous-espace vectoriels

Théorème 7.2 (Critère #1, page 3 des notes de cours). *Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un **sous-espace vectoriel** si et seulement si*

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } \vec{u}, \vec{v} \in W, \text{ on a } \vec{u} + \vec{v} \in W, \text{ et} \\ &\text{pour tout } c \in \mathbb{R}, \vec{u} \in W, \text{ on a } c\vec{u} \in W. \end{aligned}$$

Théorème 7.3. *Si W est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel V avec une norme (ou produit scalaire), alors cet opérateur définit une norme (produit scalaire) sur W .*

Exemples

Exemple 7.1. Montrez que dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel.

Exemple 7.2. Montrez que dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$$

n'est pas un sous-espace vectoriel.

Propriétés des sous-espace vectoriels

Théorème 7.4. *Si W_1 et W_2 sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V , alors $W_1 \cap W_2$ est aussi un sous-espace vectoriel.*

Exemples

Exemple 7.3. Soit le cube dans $\mathbb{R}^3$ défini par

$$Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}.$$

Soit l'ensemble des champs de vecteurs dans Q avec composantes polynomiales de degré au plus n ,

$$V = \{\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in (P^n)^3 \mid p_i : Q \mapsto \mathbb{R}, p_i = p_i(x, y, z) \text{ un polynôme}\}.$$

Montrez que V est un espace vectoriel.

Exemples

Exemple 7.4. Soit le W_1 , le sous-ensemble de V des champs de vecteurs à divergence nulle, c-à-d, tous les $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in V$ tels que

$$\frac{\partial p_1}{\partial x}(\vec{x}) + \frac{\partial p_2}{\partial y}(\vec{x}) + \frac{\partial p_3}{\partial z}(\vec{x}) = 0$$

pour tout point $\vec{x} \in Q$. Montrez que W_1 est un sous-espace vectoriel.

Exemples

Exemple 7.5. Soit le W_2 , le sous-ensemble de V des champs de vecteurs à moyenne nulle, c-à-d, tous les $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in V$ tels que

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p_1(x, y, z) + p_2(x, y, z) + p_3(x, y, z) \, dx dy dz = 0$$

Montrez que W_2 est un sous-espace vectoriel.

Exemple 7.6. Montrez que $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace vectoriel de V .