Chapitre 2

Introduction

Cette présentation résume le contenu des section 1.1 à 2.3 des notes de cours. On se concentre sur les notions élémentaires des espaces vectoriels, dont la notion d'indépendance linéaire, la dimension et l'orthogonalité.

1 Sous-espaces engendrés

Combinaison linéaire

Définition 1.1. *Soit une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$ dans un espace vectoriel V. Si $c_1, c_2, \dots, c_n$ sont des nombres réels, alors on dit que le vecteur suivant*

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n$$

est une ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$.*

Définition 1.2. *L'ensemble des combinaison linéaires de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$, c-à-d*

$$\left\{ \vec{v} \in V \middle| \vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n \right\},$$

se dénote

$$\big[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\big].$$

Combinaison linéaire

Théorème 1.3. *Le sous-ensemble $\big[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\big]$ de V est un sous-espace vectoriel. On l'appelle le* ***sous-espace engendré*** *par $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n \in V$. Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ s'appellent les* ***générateurs*** *de ce sous-espace.*

Combinaison linéaire

Exemple 1.1. Soient les vecteurs

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 =& (1, -2, 1),\\ \vec{u}_2 =& (3, -1, 2).\end{aligned}$$

Déterminez si les vecteurs suivants

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 =& (-2, -6, 0),\\ \vec{w}_2 =& (-1, -6, 1),\end{aligned}$$

appartiennent à $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$. Si oui, trouvez c_1 et c_2 tels que

$$\vec{w}_i = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2.$$

Combinaison linéaire

Exemple 1.2. Donner une description par contraintes du sous-espace vectoriel $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \subset \mathbb{R}^3$ où

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 =& (3, 0, -2),\\ \vec{u}_2 =& (-1, 1, 3).\end{aligned}$$

Combinaison linéaire

Exemple 1.3. Trouvez des vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in \mathbb{R}^4$ tels que l'espace vectoriel

$$P = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| \, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\right\}$$

soit engendré par $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

Indépendence linéaire

Définition 1.4. *Soit une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in V$ dans un espace vectoriel V. S'il existe un vecteur $\vec{u}_i$ et une combinaison linéaire $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tel qu'on puisse s'écrire*

$$\vec{u}_i = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

alors on dit que les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ sont liés. Si une telle combinaison n'existe pas, alors on dira que les vecteurs sont ***linéairement indépendants****.*

Indépendance linéaire

Exemple 1.4. Soient les trois vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 =& (1, 1, 2, 2, 3)\\ \vec{u}_2 =& (5, 4, 3, 2, 1)\\ \vec{u}_3 =& (4, 3, 1, 0, -2).\end{aligned}$$

Est-ce que ces vecteurs sont linéairements indépendants ?

Indépendence linéaire

Théorème 1.5. *Une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ est linéairement indépendante si et seulement si l'identité*

$$0 = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

implique que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Indépendence linéaire

Exemple 1.5. Montrez que la famille de polynôme

$$\begin{aligned} p_1(x) =& 1 + x, \\ p_2(x) =& x + x^2, \\ p_3(x) =& x^2 + x^3, \end{aligned}$$

est linéairement indépendante dans P^3.

Indépendence linéaire

Définition 1.6. *Soit le sous-espace vectoriel $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n]$ de V. On appelle alors $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ un* ***système générateur****. Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ sont linéairement indépendants, on dira qu'ils forment un* ***système générateur libre****.*

Exemple 1.6. Trouvez un système générateur libre pour le sous-espace vectoriel

$$W = \Big\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,\Big|\, -3x - 2y + w = 0 \text{ et } \\ x + y - 2z + 3w = 0\Big\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Principe du rejet

Définition 1.7. *Soit le sous-espace vectoriel $W = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n]$ de V. Si un des vecteurs, disons $\vec{u}_k$, est une combinaison linéaire des $n - 1$ autres vecteurs,*

$$\vec{u}_k = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_{k-1}\vec{u}_{k-1} + c_{k+1}\vec{u}_{k+1} + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

alors

$$W = [\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{k-1}, \vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n].$$

Exemple 1.7. Trouvez un système générateur libre pour le sous-espace vectoriel

$$W = \left[x + x^2, 1 + 2x^2, 1 - x + x^2\right] \subset P^2.$$

Principe du rejet

Théorème 1.8. *De tout système générateur on peut extraire un système générateur libre.*

Preuve Soit un système générateur $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n]$ d'un espace vectoriel W. S'il n'est pas déjà libre, alors il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$, non tous nuls, telles que

$$0 = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_n\vec{u}_n.$$

Si $c_k \neq 0$, alors

$$\vec{u}_k = -\frac{c_1}{c_k}\vec{u}_1 - \cdots - \frac{c_{k-1}}{c_k}\vec{u}_{k-1} - \frac{c_{k+1}}{c_k}\vec{u}_{k+1} - \cdots - \frac{c_n}{c_k}\vec{u}_n$$

et le principe du rejet s'applique. On répète jusqu'à ce qu'on ait un système générateur libre.

Principe du rejet

Théorème 1.9. *Les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont linéairements indépendants si et seulement si tout vecteur $\vec{v} \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n]$ ne peut s'écrire*

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n,$$

que de manière unique.

Preuve Supposons que les $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ sont linéairement indépendants. Soit $\vec{v} \in V$ quelconque et deux combinaisons linéaires

$$\begin{aligned}\vec{v} =& a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n,\\ \vec{v} =& b_1\vec{u}_1 + \cdots + b_n\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Si on prend la différence, alors

$$0 = (a_1 - b_1)\vec{u}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\vec{u}_n.$$

Preuve du Théorème 1.9 (Suite)

Puisque les vecteurs sont linéairement indépendants, on déduit

$$(a_1 - b_1) = 0,\ (a_2 - b_2) = 0,\ \cdots (a_n - b_n) = 0,$$

c-à-d $a_i = b_i$ et les deux combinaisons linéaires sont identiques.

Supposons que l'écriture de tout $\vec{v} \in V$ est unique. Alors, si $\vec{v} = \vec{0}$, on trouve

$$\vec{0} = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_n\vec{u}_n.$$

La seule façon d'écrire ceci serait de choisir $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$.

Fin de la preuve

Principe du rejet

Exemple 1.8. Obtenez un système générateur libre pour

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -5x + y + 2z = 0 \right\}.$$

2 Base et dimension

Dimension finie et infinie

Définition 2.1. *Un espace vectoriel V est de dimension finie s'il possède un système générateur fini. Sinon, on dit que V est de dimension infinie.*

Exemple 2.1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.

$\mathbb{R}^n$ est de dimension finie car $\mathbb{R}^n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n]$ où

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dimension finie et infinie

Exemple 2.2. L'espace P^n est de dimension finie.

P^n est de dimension finie car $P^n = [1, x, x^2, \ldots, x^n]$.

Exemple 2.3. L'espace P de tous les polynômes est de dimension infinie.

Dimension finie et infinie

Exemple 2.4. L'espace $L^2([-1, 1])$ est de dimension infinie.

En fait, les fonctions

$$\begin{aligned} 1, \sin \pi x, \sin 2\pi x, \ldots \\ \cos \pi x, \cos 2\pi x, \ldots \end{aligned}$$

sont une famille infinie de vecteurs linéairement indépendants dans $L^2([-1, 1])$ (Nous serons en mesure de démontrer ceci plus tard dans le cours). Ceci implique qu'il ne peut pas exister de système générateur libre fini.

Dimension finie

Définition 2.2. *Une famille de vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$ dans V s'appelle une* ***base*** *si*
(i) $V = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n]$,
(ii) les vecteurs sont linéairement indépendants.

Une **base** de V c'est la même chose qu'un **système générateur libre** de V.

Exemple 2.5. Montrez que $(1, 2, 1), (2, 9, 0)$, et $(3, 3, 4)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Dimension finie

Théorème 2.3. *Toute base d'un espace vectoriel V de dimension finie possède le même nombre de vecteurs.*

Définition 2.4. *La* ***dimension*** *d'un espace vectoriel est égal au nombre de vecteurs dans une de ces bases.*

Exemple 2.6. Montrez que P^3 est un espace de dimension 4.

Preuve du Théorème 2.3

Soient deux bases de V, disons

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n,$$

et

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m,$$

avec $n < m$. Alors chaque chaque $\vec{v}_i$ s'écrit dans la base des $\vec{u}_i$, selon

$$\vec{v}_i = a_{i1}\vec{u}_1 + a_{i2}\vec{u}_2 + \cdots + a_{in}\vec{u}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Preuve du Théorème 2.3 (suite)

Maintenant, on vera que les $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_m$ ne sont pas linéairement indépendants. Soient des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ telles que

$$\begin{aligned}\vec{0} =& c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_m\vec{v}_m \\ =& c_1\big(a_{11}\vec{u}_1 + a_{12}\vec{u}_2 + \cdots + a_{1n}\vec{u}_n\big) \\ &+ \cdots \\ &\quad c_m\big(a_{m1}\vec{u}_1 + a_{m2}\vec{u}_2 + \cdots + a_{mn}\vec{u}_n\big) \\ =& (c_1a_{11} + c_2a_{21} + \cdots + c_ma_{m1})\vec{u}_1 \\ &+ \cdots \\ &+ (c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\vec{u}_n.\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 2.3 (suite)

Puisque les $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ sont linéairement indépendants, alors

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 a_{11} + c_2 a_{21} + \cdots + c_m a_{m1} \\ 0 &= c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + \cdots + c_m a_{m2} \\ \vdots &= \vdots \\ 0 &= c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \cdots + c_m a_{mn}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne n équations pour $m > n$ inconnues. Il existe nécessairement un nombre infini de solutions. En d'autres mots, il existe des $c_1, \dots, c_m$ non tous nuls tels que

$$\vec{0} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \cdots + c_m \vec{v}_m.$$

Les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ sont linéairement indépendants.

Fin de la preuve

Dimension finie

Exemple 2.7. Trouvez une base de

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{aligned} 2x - y - w &= 0 \\ y + 2z + 3w &= 0 \end{aligned} \right\}$$

et de $W^\perp$. Donnez la dimension de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

Dimension finie

Théorème 2.5. *Soit un espace vectoriel V de dimension n et $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ un ensemble quelconque de n vecteurs de V.*

(i) si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont linéairement indépendants, alors ils forment une base ;

(ii) si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ sont un système générateur, alors ils forment une base.

Exemple 2.8. Est-ce que les polynômes de Tchebychev

$$T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x, \; T_2(x) = 2x^2 - 1, \; T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

forment une base de P^3 ? Vous pouvez supposer que $\dim(P^3) = 4$.

Théorème de la base incomplète

Théorème 2.6. *Soit un espace vectoriel V de dimension finie et W un sous-espace vectoriel de V. Les propriétés suivantes tiennent*

(i) $\dim(W) \leq \dim(V)$ *;*

(ii) si $\dim(W) = \dim(V)$ *alors* $W = V$ *;*

(iii) si $\dim(W) = m$, $\dim(V) = n$ *et $m < n$, alors toute base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_n, \dots, \vec{u}_m\}$ de W s'étend en une base de V à l'aide de $n - m$ vecteurs dans $V \setminus W$, disons $\vec{u}_{m+1}, \vec{u}_{m+2}, \dots, \vec{u}_n$.*

Théorème de la base incomplète

Exemple 2.9. Soit le sous-espace vectoriel

$$W = \left[\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{k}\right] \subset \mathbb{R}^3.$$

Trouvez une base de W et étendez cette base pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème de la base incomplète

Exemple 2.10. Sachant que les polynômes de Tchebychev

$$T_0(x) = 1, \;\; T_1(x) = x, \;\; T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

forment une base de P^2, étendez cet ensemble afin d'obtenir une base de P^4.

3 Espaces vectoriels avec un produit scalaire

Rappel

Définition 3.1. *Soit un espace vectoriel V et une fonction*

$$\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On dit qu'elle définit un produit scalaire si elle satisfait les conditions suivantes :
i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
iii) $c(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (c\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (c\vec{v})$*,*
iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ *et* $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$*.*

Définitions

Définition 3.2. *Soit un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** *si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.*
La ***norme*** *est $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.*
Un vecteur $\vec{u}$ est ***unitaire*** *si $\|\vec{u}\| = 1$.*
Un ensemble de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est dit ***orthogonal*** *si*

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0, \quad \textit{quand } i \neq j.$$

Un ensemble de vecteurs $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est dit ***orthonormal*** *s'il est orthogonal et si chaque vecteur est unitaire.*
On pourra donc parler de ***base orthogonale*** *et de* ***base orthonormale****.*

Exemples

Exemple 3.1. Montrez que

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Orthogonalité et décompositions

Théorème 3.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base **orthonormale**, alors tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{v} = (\vec{u}_1 \cdot \vec{v})\vec{u}_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{u}_n \cdot \vec{v})\vec{u}_n.$$

Orthogonalité et décompositions

La formule du Théorème 3.3 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{v} =&(\vec{u}_1 \cdot \vec{v})\vec{u}_1 + (\vec{u}_2 \cdot \vec{v})\vec{u}_2 + \cdots + (\vec{u}_n \cdot \vec{v})\vec{u}_n \\ =&\|\vec{v}\|\Big(\frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v})}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1 + \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v})}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}_2\|}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{(\vec{u}_n \cdot \vec{v})}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}_n\|}\vec{u}_n\Big) \\ =&\|\vec{v}\|\Big(\cos(\theta_1)\vec{u}_1 + \cos(\theta_2)\vec{u}_2 + \ldots + \cos(\theta_n)\vec{u}_n\Big)\end{aligned}$$

où θ_i est l'angle entre $\vec{u}_i$ et $\vec{v}$.

Preuve du Théorème 3.3

Puisque $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base, alors on sait qu'il existe des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telles que

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n.$$

Il suffit de montrer que $c_k = \vec{u}_k \cdot \vec{v}$ pour $k = 1, \ldots, n$.

On calcule

$$\begin{aligned}\vec{u}_k \cdot \vec{v} =&\vec{u}_k \cdot \big(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_n\big) \\ =&c_1\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1 + c_2\vec{u}_k \cdot \vec{u}_2 + \cdots + c_n\vec{u}_k \cdot \vec{u}_n \\ =&c_1 0 + \cdots + 0 + c_k\vec{u}_k\vec{u}_k + 0 + \cdots + 0 \\ =&c_k.\end{aligned}$$

Orthogonalité et décompositions

Théorème 3.4 (Généralisation du Théorème 3.3)**.** *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire. Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base **orthogonale**, alors tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{v} = \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{(\vec{u}_n \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_n\|^2}\vec{u}_n.$$

Preuve du Théorème 3.4

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base orthogonale, alors les vecteurs

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}, \ldots, \vec{w}_n = \frac{\vec{u}_n}{\|\vec{u}_n\|}$$

sont unitaires et forment une base orthogonale.

Si on applique le théorème précédent à la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$, on trouvera

$$\begin{aligned}\vec{v} =& (\vec{w}_1 \cdot \vec{v})\vec{w}_1 + (\vec{w}_2 \cdot \vec{v})\vec{w}_2 + \cdots + (\vec{w}_n \cdot \vec{v})\vec{w}_n \\ =& \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{(\vec{u}_n \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_n\|^2}\vec{u}_n,\end{aligned}$$

ce qui est la formule que l'on cherchait à démontrer.

Orthogonalité et décompositions

Théorème 3.5. *Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Tout ensemble **orthogonal** de vecteurs non-nuls est **libre**.*

Proof Soit un ensemble de vecteurs orthogonaux $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ et

$$W = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n].$$

Selon le Théorème 3.4, tout vecteur $\vec{v} \in W$ s'écrit de manière unique par rapport à cet ensemble, donc l'ensemble doit être libre.

Exemples

Exemple 3.2. Montrez que

$$\left\{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, -\vec{i} + \vec{k}, -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right\}$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Décomposer $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ dans cette base.

Exemples

Exemple 3.3. Montrez que

$$\left\{(1,1,1), (0,1,-1), (-2,1,1)\right\}$$

est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Décomposer $\vec{u} = (1,2,6)$ dans cette base.

4 Le procédé de Gram-Schmidt

Procédé d'orthogonalisation

Théorème 4.1. *Tout espace de dimension finie possède une base orthogonale (ou orthonormée, si vous préférez).*

Preuve La preuve est constructive et elle est basée sur le procédé de Gram-Schmidt. Soit une base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ de V. On pose d'abord

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 =& \vec{u}_1,\\ \vec{e}_2 =& \vec{u}_2 - \operatorname{proj}_{\vec{e}_1} \vec{u}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1.\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 4.1

On observe que si $\vec{e}_2 = 0$, alors nécessairement

$$\frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{u}_1 = \vec{u}_2,$$

c'est à dire que $\vec{u}_2$ serait un multiple de $\vec{u}_1$. Impossible. Donc $\vec{e}_2 \neq 0$. Si on connaît k vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$ orthogonaux qui engendrent le sous-espace vectoriel $[\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k]$, alors nous montrerons comment construire un nouveau vecteur $\vec{e}_{k+1}$, orthogonal aux vecteurs précédants et tel que

$$[\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}] = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{u}_{k+1}].$$

On pose

$$\begin{aligned}\vec{e}_{k+1} =& \vec{u}_{k+1} - \operatorname{proj}_{\vec{e}_1} \vec{u}_{k+1} - \cdots - \operatorname{proj}_{\vec{e}_k} \vec{u}_{k+1}\\ =& \vec{u}_{k+1} - \frac{\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 - \cdots - \frac{\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_k}{\|\vec{e}_k\|^2}\vec{e}_k.\end{aligned}$$

Preuve du Théorème 4.1

Il reste à montrer que

$$\vec{e}_{k+1} \cdot \vec{e}_1 = 0, \cdots, \vec{e}_{k+1} \cdot \vec{e}_k.$$

et que $\vec{e}_{k+1} \neq 0$. On calcule

$$\begin{aligned}\vec{e}_j \cdot \vec{e}_{k+1} =& \vec{e}_j \cdot \left(\vec{u}_{k+1} - \frac{\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2}\vec{e}_1 - \cdots - \frac{\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_k}{\|\vec{e}_k\|^2}\vec{e}_k\right)\\ =& \vec{e}_j \cdot \vec{u}_{k+1} - 0 - \cdots - \frac{\vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_j}{\|\vec{e}_j\|^2}\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j - \cdots - 0\\ =& \vec{e}_j \cdot \vec{u}_{k+1} - \vec{u}_{k+1} \cdot \vec{e}_j = 0.\end{aligned}$$

Si $\vec{e}_{k+1} = 0$, alors

$$\vec{u}_{k+1} \in [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k] = [\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k],$$

mais $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{k+1}$ sont lin. indép ! Contradiction, donc $\vec{e}_{k+1} \neq 0$.

Exemples

Exemple 4.1. Soit la base

$$\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Utilisez le procédé de Gram-Schmidt pour construire une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Exemples

Exemple 4.2. Soit P^2, l'espace des polynômes de degré au plus 2 avec le produit scalaire

$$p \cdot q = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

À partir de la base

$$\{1, x, x^2\}$$

de P^2, appliquez le procédé de Gram-Schmidt afin de construire une base orthogonale de P^2.

Orthogonalité et produit scalaire

Définition 4.2. *Soit W un sous-espace vectoriel de V. Alors on définit*

$$W^\perp = \left\{\vec{v} \in V \,\middle|\, \vec{v} \cdot \vec{w} = 0, \forall \vec{w} \in W\right\},$$

*le **complément orthogonal** de W dans V.*

Théorème 4.3. *L'ensemble $W^\perp$ est un sous-espace vectoriel de W.*

Orthogonalité et produit scalaire

Théorème 4.4. *Soit W un sous-espace vectoriel de V de dimension k avec une base*

$$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\}.$$

Alors

$$W^\perp = \left\{\vec{v} \in V \,\middle|\, \vec{v} \cdot \vec{w}_1 = 0,\ \vec{v} \cdot \vec{w}_2 = 0,\ \ldots,\ \vec{v} \cdot \vec{w}_k = 0\right\}.$$

Preuve Si un vecteur

$$\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = 0,\ \ldots,\vec{v} \cdot \vec{u}_k = 0,$$

alors

$$\vec{v} \cdot \big(c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_k\vec{u}_k\big) = c_1\vec{v} \cdot \vec{u}_1 + \cdots + c_k\vec{v} \cdot \vec{u}_k = 0.$$

Orthogonalité et décompositions

Théorème 4.5. *Étant donné un sous-espace vectoriel W de dimension k d'un espace vectoriel de dimension n, alors tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{v} = \operatorname{proj}_W \vec{v} + \operatorname{proj}_{W^\perp} \vec{v},$$

avec $\operatorname{proj}_W \vec{v}$ *et* $\operatorname{proj}_{W^\perp} \vec{v} \in W^\perp$.

Théorème 4.6.

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

Orthogonalité et décompositions

Théorème 4.7. *Sous les mêmes conditions que le théorème précédant mais connaissant une base orthogonale $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k\}$ de W, alors la décomposition $\vec{v} = \operatorname{proj}_W \vec{v} + \operatorname{proj}_{W^\perp} \vec{v}$ s'écrit*

$$\operatorname{proj}_W \vec{v} = \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1 + \frac{(\vec{u}_2 \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_2\|^2}\vec{u}_2 + \cdots + \frac{(\vec{u}_k \cdot \vec{v})}{\|\vec{u}_k\|^2}\vec{u}_k.$$

De plus,

$$\operatorname{proj}_{W^\perp} \vec{v} = \vec{v} - \operatorname{proj}_W .$$

5 Bases et représentations

Objectifs

Dans cette section, nous verrons plusieurs choses.
i) Comment représenter tout espace vectoriel comme $\mathbb{R}^n$.
ii) Comment relier ces représentations.
iii) Comment identifier l'indépendance linéaire dans ces représentations.

Bases

Définition 5.1. *Soit une base ordonnée $B = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right)$ de V. Alors tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique*

$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n.$$

On appelle le vecteur colonne

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

***la représentation de** $\vec{v}$ **dans la base** B.*

Exemples

Exemple 5.1. Soit $B = (1, x, x^2)$ et $C = (1 + x, 1 - x, x + x^2)$, deux bases de P^2. Alors, pour $p(x) = 1 - 2x + 5x^2$ calculez

$$[p]_B \qquad \text{et} \qquad [p]_C.$$

Linéarité de la représentation

Théorème 5.2. *Si B est une base ordonnée de V, alors pour tout $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in V$ et tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$[c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2]_B = c_1[\vec{u}_1]_B + c_2[\vec{u}_2]_B.$$

La représentation d'une combinaison linéaire est égale à la combinaison linéaire des représentations. En d'autres mots, l'addition et la multiplication dans V se fait la même manière que dans $\mathbb{R}^n$.

La représentation de V dans $\mathbb{R}^n$ conserve la structure vectoriel de V.

Représentation du produit scalaire

Théorème 5.3. *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un produit scalaire et d'une base* ***orthonormale*** *B. Alors le produit scalaire se calcule de la manière suivante :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{v}]_B = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n,$$

où

$$[\vec{u}]_B = [u_1, u_2, \ldots, u_n]^T, \quad \textit{et} \quad [\vec{v}]_B = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^T.$$

La représentation de V dans $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une base orthonormale, renvoie le produit scalaire sur V au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Représentations

Conclusions

i) À l'aide d'une base, tout espace vectoriel peut être identifié à $\mathbb{R}^n$.

ii) À l'aide d'une base orthonormale, la géométrie d'un espace vectoriel peut être identifié à celle de $\mathbb{R}^n$.

iii) La **dimension** d'un espace vectoriel de dimension finie caractérise entièrement l'espace.

Matrice de transition

Définition 5.4. *Soient deux bases ordonnées* $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n)$ *et* $B' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \ldots, \vec{b}'_n)$ *de* V*. Alors il existe* n^2 *nombres* a_{ij} *tels que*

$$\begin{aligned}
\vec{b}'_1 =& a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{b}_n \\
\vec{b}'_2 =& a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{b}_n \\
\vdots =& \vdots \\
\vec{b}'_n =& a_{1n}\vec{b}_1 + a_{2n}\vec{b}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{b}_n.
\end{aligned}$$

Matrice de transition (suite)

La **matrice de transition de** B' **à** B s'écrit

$$_BP_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vec{b}'_1]_B & [\vec{b}'_2]_B & \cdots & [\vec{b}'_n]_B \end{bmatrix}$$

où l'on doit interpreté les vecteurs $[\vec{b}'_i]_B$ comme les colonnes de la matrice de transition de B' à B.

Matrice de transition

Théorème 5.5. *Si* B *et* B' *sont deux bases ordonnées d'un espace vectoriel* V*, alors pour tout* $\vec{u} \in V$ *on a l'identité*

$$[\vec{u}]_B = {}_BP_{B'}[\vec{u}]_{B'}.$$

Exemples

Exemple 5.2. Soit $B = (1, x, x^2)$ et $C = (1 + x, 1 - x, x + x^2)$, deux bases de P^2. Alors, calculez $_CP_B$ et $_BP_C$.

Matrice de transition

Théorème 5.6. *Si* $A, B,$ *et* C *sont trois bases ordonnées d'un espace vectoriel* V*, alors*

(i) $_AP_B \cdot {}_BP_A = I$ *;*

(ii) $_AP_B \cdot {}_BP_C = {}_AP_C$.

Exemples

Exemple 5.3. Avec les bases $B = (1, x, x^2)$ et $C = (1 + x, 1 - x, x + x^2)$ de P^2, calculez

$$[p]_C$$

où $p(x) = 5 - 3x + 2x^2$.

Exemples

Exemple 5.4 (Exemple 2.4 du livre). Soit $A = (\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i})$ et $B = (2\vec{i} + \vec{k}, 4\vec{i} + \vec{k}, 3\vec{j} + 4\vec{k})$, deux bases de $\mathbb{R}^3$. Alors, calculez ${}_AP_B$.

6 Matrices orthogonales

Définition

Définition 6.1. *Soit une matrice carrée A dont les vecteurs colonnes sont $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n)$, c-à-d que A s'écrit*

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n] .$$

*Si les n colonnes forment une **base orthonormale** de $\mathbb{R}^n$ selon le produit scalaire standard, alors on dira que A est une **matrice orthogonale**.*

Une réécriture

Théorème 6.2. *Une matrice*

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n] ,$$

est orthogonale si et seulement si

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vec{a}_n \cdot \vec{a}_1 & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \cdot \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} .$$

En d'autres mots, A est orthogonale si et seulement si

$$A^T \cdot A = I, \quad \textit{ou bien} \quad A^{-1} = A^T .$$

L'exemple canonique

Théorème 6.3. *Soient deux bases ordonnées **orthonormales** $B = \left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\right)$ et $C = \left(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \ldots, \vec{c}_n\right)$ de V. Alors la matrice de transition ${}_BP_C$ est **orthogonale**.*

L'exemple canonique

Preuve du Théorème 6.3 Si les nombres a_{ij} sont tels que

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 =& a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{b}_n \\ \vec{c}_2 =& a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + \cdots + a_{n2}\vec{b}_n \\ \vdots =& \vdots \\ \vec{c}_n =& a_{1n}\vec{b}_1 + a_{2n}\vec{b}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{b}_n \end{aligned}$$

alors

$$ {}_BP_C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}. $$

L'exemple canonique

Preuve du Théorème 6.3 (suite) La base C est orthonormale, donc

$$ \vec{c}_i \cdot \vec{c}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq 0. \end{cases} $$

Explicitement, on déduit

$$ \begin{aligned} \vec{c}_i \cdot \vec{c}_j =& \left(a_{1i}\vec{b}_1 + a_{2i}\vec{b}_2 + \cdots + a_{ni}\vec{b}_n\right) \cdot \left(a_{1j}\vec{b}_1 + a_{2j}\vec{b}_2 + \cdots + a_{nj}\vec{b}_n\right) \\ =& a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} \\ =& \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j . \end{aligned} $$

En d'autres mots, les colonnes de A forment un ensemble orthonormale. La matrice A est orthogonale.

Propriétés

Théorème 6.4. *Soit une matrice **orthogonale**, alors*

$$ \det(A) = \pm 1 \, . $$

Preuve Utilisant le fait que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det(A^T) = \det(A)$, on trouve

$$ 1 = \det(I) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = \big(\det(A)\big)^2 . $$